

# Um Estudo sobre o Modelo de Markowitz

**Aluno: Daniel dos Santos Marques**

**Orientador: Eduardo Sany Laber**

## 1. Introdução

Foi feito um estudo do modelo de Markowitz, modelo que serve de base para a Teoria de Portfolio Moderna [2], onde se busca uma carteira de ativos com maior retorno possível dentre aquelas que satisfaçam certas restrições de risco. Também foram estudados métodos de Aprendizado de Máquina para captação de padrões e melhor estimativa dos retornos dos ativos. Estas estimativas foram então utilizadas em conjunto com o modelo de Markowitz sobre uma base de dados do Ibovespa.

### Objetivos

Estudar a aplicação da Teoria de Portfolio Moderna em ativos da Bolsa de Mercadorias e Futuros (BMF) assim como estudar métodos de Aprendizado de Máquina e sua possível utilização em conjunto com o modelo de Markowitz. Além disso, tivemos como objetivo estudar ferramentas computacionais utilizadas nas áreas de otimização e aprendizado de máquina.

### Organização do Documento

O documento está organizado da seguinte forma. Nas seções 2 e 3 discutimos brevemente a área de aprendizado de máquina e a Teoria Moderna de Portfolios. Na seção 4 explicamos como foi desenvolvido o projeto. Finalmente, na seção 5 apresentamos nossas conclusões.

## 2. Aprendizado de Máquina

Aprendizado de máquina é uma área que desenvolve algoritmos capazes de extrair padrões de um conjunto de dados [1]. Para esse projeto foram utilizadas técnicas de classificação de dados.

Em linhas gerais, a técnica de classificação consiste em aprender (determinar) uma função com valor discreto a partir de um conjunto de *exemplos* de como a função deve se comportar. Um exemplo é um par  $(\mathbf{a}, v)$ , aonde  $\mathbf{a}=(a(1), \dots, a(N))$  é um ponto do domínio da função e  $v$  é o valor da função no ponto  $\mathbf{a}$ . Cada coordenada do ponto  $\mathbf{a}$  é chamado de atributo.

A definição dos atributos faz parte da tarefa de classificação de dados. Estes atributos devem ser relevantes para determinar o valor da função.

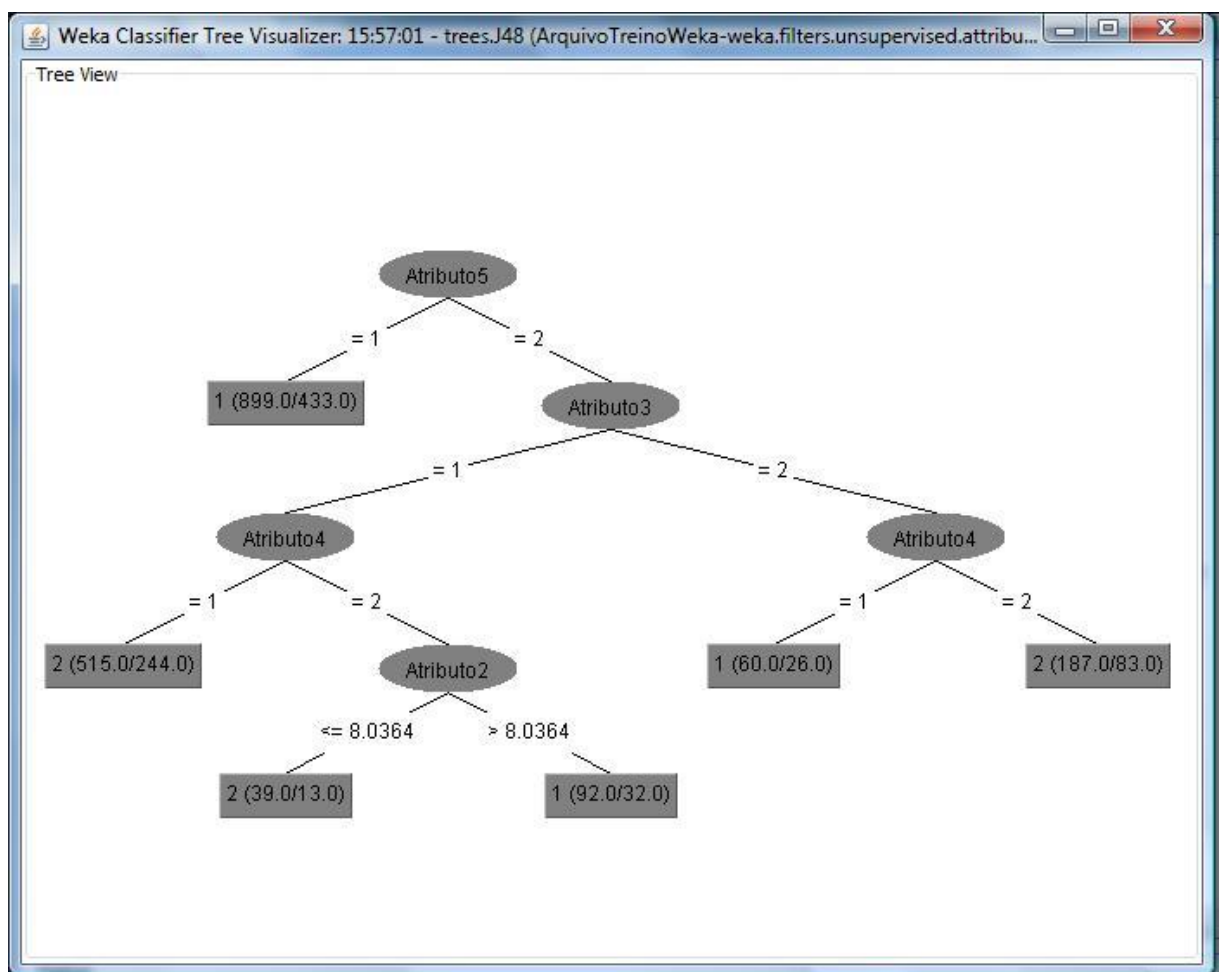
Criar muitos atributos pode ser problemático em certos casos. O problema surge quando o algoritmo captura padrões que não existem na realidade. Um excesso de dados gera muito ruído que pode ser confundido pelo método de aprendizado.

Existem vários métodos disponíveis para realizar uma tarefa de classificação, como árvores de decisão, redes neurais, vizinhos mais próximos, dentre outros. Neste projeto utilizamos as árvores de decisão

### Árvores de Decisão

É uma árvore onde cada nó representa um atributo e existe uma aresta para cada valor (ou faixa de valor) que o atributo assume. Cada folha representa a classificação final do dado de entrada. Uma das vantagens dessa árvore é que é possível ver o formato dela e entender os padrões capturados.

A figura abaixo mostra um exemplo de árvore de decisão utilizada neste projeto. Como exemplo, se o atributo 5 tem valor 1 e os atributos 3 e 4 tem valor 2, então a árvore atribui à entrada a classe 2.



Como a implementação de árvores de decisão pode ser muito complexa e não fazia parte do objetivo do projeto procuramos um software para auxiliar na tarefa. O programa escolhido foi o Weka [3], nele tem-se acesso a vários algoritmos de árvore de decisão onde é possível escolher qual deles melhor se adequou ao problema.

O tipo de árvore escolhido foi o J48 pois apresentou bons resultados e se adequou bem ao problema proposto.

### 3. Teoria de Portfolio Moderna

A Teoria de Portfolio Moderna explica como investidores utilizam o princípio da diversificação para otimizar as carteiras de investimento. Ela permite tomar a decisão de quanto investir em cada ativo de forma ótima respeitando restrições de risco e retorno. Fornece uma base matemática para conceitos como diversificação de investimentos, onde tem-se a ideia de que quanto maior o número de ativos, pouco correlacionados, utilizados menor será o risco.

O principal modelo da Teoria de Portfolio Moderna é o Modelo de Markowitz cujas principais características são discutidas a seguir

#### Modelo de Markowitz

É um modelo matemático que resolve o problema de decisão da alocação de um portfolio. Relaciona risco com retorno e assume que um investidor prefere menos risco dado um retorno fixo. A definição de risco utilizada é a da variância, ou seja, menos risco significa uma menor variância. Assumir que risco é igual à variância (ou desvio padrão) é bastante aceito pois estas medidas costumam andar juntas.

O problema é formulado como uma programação quadrática, onde deseja-se minimizar uma função de risco sob restrição de retorno, sendo a variável de decisão a quantia a ser alocada em cada ativo.

A formulação matemática consiste em minimizar a função abaixo

$$f(W) = \sum_i \sum_j w_i w_j \sigma_{ij}$$

sujeito às restrições

$$\sum_i R_i w_i \geq RetMinimo$$

aonde  $w_i$  é o percentual do patrimônio alocado ao ativo  $i$ ,  $R_i$  é o retorno estimado para o ativo  $i$ ,  $\sigma_{ij}$  é a covariância entre os ativos  $i$  e  $j$  e  $RetMinimo$  é o retorno esperado mínimo que o portfolio deve atingir.

### 4. Metodologia

Nesta seção explicamos como o projeto foi realizado. Primeiramente, descrevemos o ambiente computacional e a base de dados utilizada. Após, explicamos o nosso método de previsão de retorno. Finalmente, reportamos nossos resultados computacionais.

#### Ambiente Computacional

O software escolhido para dar principal apoio ao projeto foi o Matlab. É um programa onde é possível criar rotinas de programação e onde pode-se utilizar uma grande gama de ferramentas matemáticas. Os principais motivos para a escolha do Matlab foram a facilidade que este provê para trabalhar com muitos dados e sua extensa biblioteca de funções matemáticas.

Primeiramente o Matlab foi usado para tratar os dados da base. Foi necessário modificá-los para obter somente os atributos mais importantes. Atributos como volume negociado no dia entre outros foram retirados.

A segunda parte ficou dividida em duas. Primeiro fizemos criamos um ambiente capaz de prever os retornos usando técnicas de aprendizado de máquina, e posteriormente testar os dados junto com o modelo de Markowitz.

Como não fazia parte do escopo do projeto implementar métodos de Aprendizado de Máquina, foi utilizado o software Weka para nos auxiliar. Este programa possui implementado diversos algoritmos entre eles alguns de Árvore de Decisão, que foi a estrutura escolhida para resolver o problema.

Uma outra grande vantagem do Weka, é que por ser feito em java, a integração dele como o Matlab foi muito simples. Foi necessário somente criar duas funções em Java que recebiam dados e se comunicavam com o Weka. Estas funções foram facilmente utilizadas dentro do Matlab, fazendo assim a integração entre os dois softwares.

Para implementar o Modelo de Markowitz utilizamos a função de programação quadrática fornecida pelo Matlab. Porém alguns problemas surgiram, o principal foi o alto tempo computacional necessário para fazer as simulações. Para resolver esse problema foi utilizado o software Mosek[4]. Este programa foi decisivo para a conclusão dos testes pois ele se acopla facilmente ao sistema em Matlab e é capaz de resolver problemas de programação quadrática muito rapidamente.

## **Base de Dados**

Para este projeto foi utilizada uma base de dados desenvolvida para a dissertação de mestrado de Thuener Armando da Silva [5]. Os dados estavam armazenados num banco de dados SQL, para a utilização foi necessário converter cada ativo para um arquivo CSV onde foi possível utilizá-lo junto com o Matlab.

Os preços da base já estavam ajustados para tratar eventos como dividendos e fusões entre empresas. Após obtidos os dados, foi necessário um processamento para capturar somente o que era relevante para o projeto.

Neste projeto foram utilizados somente os dados do preço de início e fim do dia de cada ativo. Informações como o volume operado em cada ação não foi considerado.

A base continha dados desde janeiro de 2002 até agosto de 2009. Porém para a realização dos testes foram utilizados somente no período de junho de 2004 até janeiro de 2008.

## **Método de previsão de retorno**

O problema de classificação abordado no projeto foi o de selecionar ativos e colocá-los em duas classes, a classe dos ativos ganhadores e dos ativos perdedores. A classe ganhadora significa que no dia atual o preço da ação deve subir. A classe perdedora significa que o preço da ação deve cair.

Uma enorme gama de índices e estatísticas podem ser utilizadas como atributos para construir o modelo de classificação como, por exemplo, o índice Sharpe e o índice Ibovespa. Porém, como neste projeto não tínhamos acesso a maioria destas estatísticas, utilizamos em geral dados referentes ao retorno dos ativos.

Neste projeto vários atributos foram testados e alguns tiveram um bom desempenho. Um exemplo interessante é de um atributo que indica se um ativo sobe ou desce no dia anterior. Empiricamente percebe-se que na maioria dos casos o desempenho é repetido no próximo dia. Naturalmente isto não é uma regra geral pois os preços variam muito ao longo

do tempo, porém eles muitas vezes seguem uma mesma tendência de subida ou descida por um período de tempo. Graças a esta propriedade esse tornou-se um bom atributo para prever se o preço de um ativo qualquer iria subir ou descer.

Outros dois atributos interessantes são o retorno dos últimos 50 e 100 dias. O primeiro motivo deles funcionarem bem é óbvio, se uma ação está em queda ou alta nos últimos 100 e 50 dias é natural que ele siga esta tendência. Outro motivo é que estes dois atributos indicam se o papel teve crescimento na primeira parte dos últimos 100 dias e na segunda parte dos últimos 100 dias. Assim o método de aprendizado pode capturar padrões do seguinte tipo: se subiu nos últimos 100 dias e cresceu nos últimos 50 dias então entrou em tendência de alta e deve subir nos próximos dias.

Para construir o modelo de classificação chamamos uma função que passa ao Weka todos os atributos necessários para construir a árvore. Para realizar a classificação enviamos somente os atributos da entrada referente ao dia atual. A classificação era então repassada ao Matlab que poderia utilizá-la no Modelo de Markowitz que foi implementado.

## Resultados Experimentais

Para realizar os testes utilizamos 10 ativos da base de dados, foram eles: petr4, ambv4, vale5, embr3, arcz6, usim5, brto4, bbas3, elet6, vale3.

Utilizando o Modelo de Markowitz onde foi calculadas a variância e covariância entre os ativos desde 2002 e os retornos também desde a mesma data. Os retornos foram calculados fazendo-se uma média aritmética dos preços das ações a cada início de dia. Dentre as formas de estimar retorno a média aritmética se revelou um bom método.

A tabela abaixo mostra as proporções alocadas para cada ativo em um dos dias testados.

PETR4	0.0964
AMBV4	0.1002
VALE5	0.0953
EMBR3	0.1065
ARCZ6	0.1011
USIM5	0.0884
BRTO4	0.1147
BBAS3	0.0947
ELET6	0.1086
VALE3	0.0941

Analisando os resultados percebe-se que o alocador colocou proporções parecidas em ativos altamente correlacionados como Vale5 e Vale3. Ele também evitou ativos com baixa previsão de retorno e mais alto risco (alta variância) como Usim5. Percebemos também que ele seguiu a ideia de diversificação, ou seja dividiu seus recursos entre todos os ativos sem fazer nenhuma aposta excessivamente alta ou desvalorizar nenhum ativo.

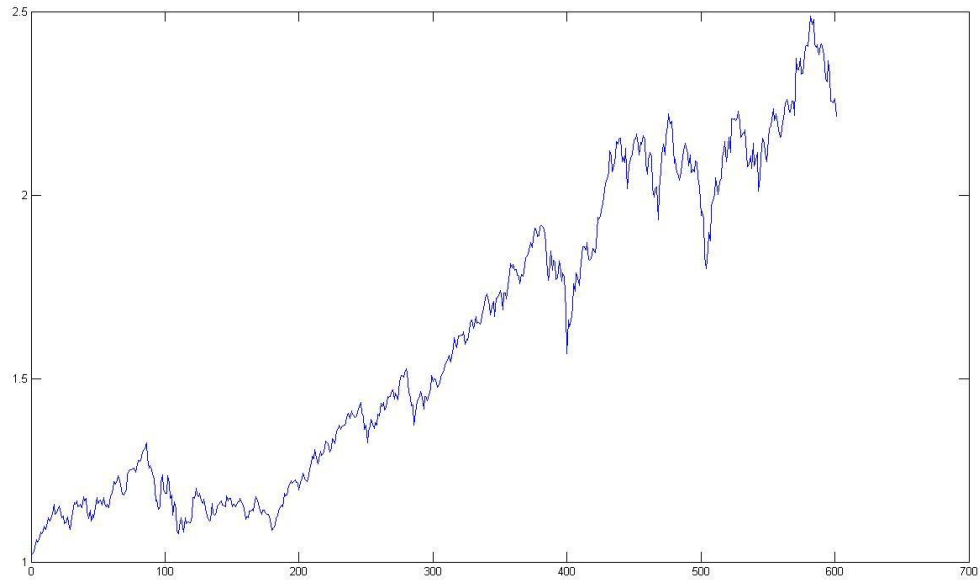
Utilizando aprendizado de máquina para prever o retorno em vez da média aritmética obtivemos um estilo de alocação dos recursos diferente. Um exemplo de como ficou a árvore de decisão pode ser visto na seção 2

Pelo fato de dividirmos a estimativa de retorno em duas classes (ganha ou perde), isto gera somente duas estimativas de retorno. Apesar dos ativos apresentarem variâncias tão variadas, a grande diferença entre os retornos de uma classe e de outra fez com que a alocação fosse realizada somente dividindo os recursos entre as classes. Ou seja, as ações que tiveram

previsão na classe ganhadora receberam quase que igualmente os recursos. O mesmo ocorreu para a classe perdedora.

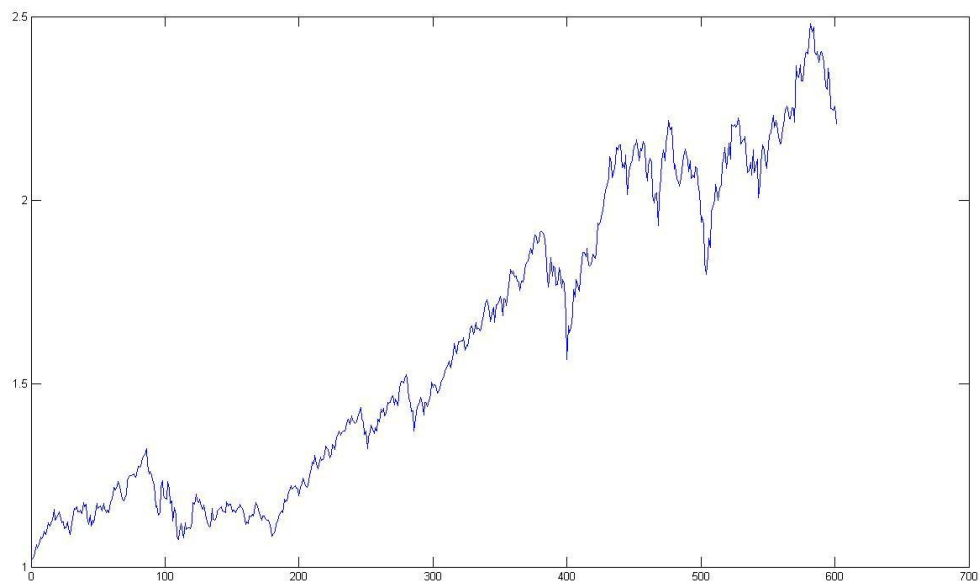
Com o intuito de comparar diferentes estratégias de estimativa de retorno foram feitos três experimentos utilizando o Modelo de Markowitz para decidir a alocação do portfólio em 600 dias diferentes. Os resultados obtidos foram os seguintes:

- Utilizando média aritmética.



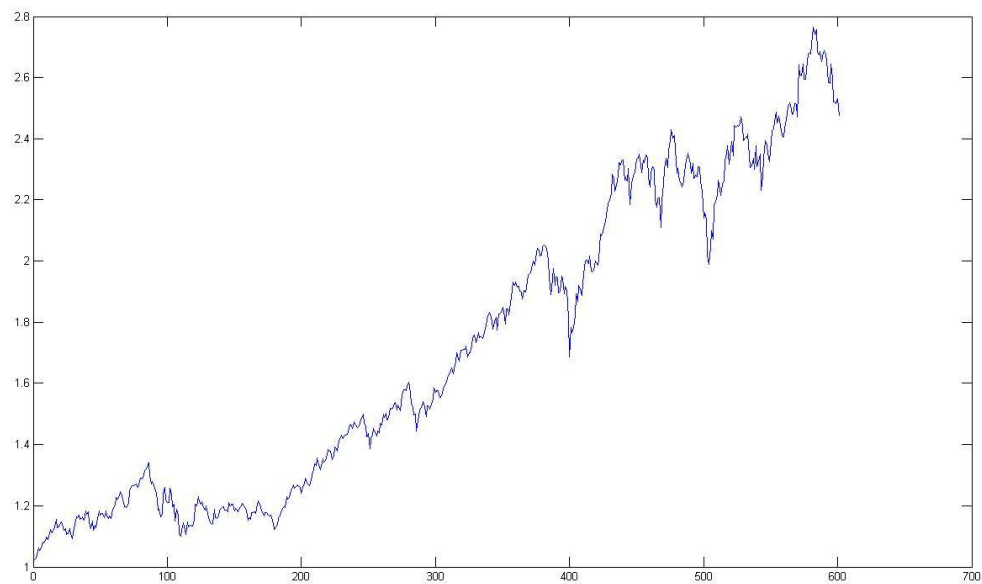
Retorno Obtido: 2.2140  
Variância obtida: 0.1742  
Índice Sharpe: 5.3406

- Utilizando média geométrica.



Retorno Obtido: 2.2071  
Variância obtida: 0.1732

## Utilizando preditor com Aprendizado de Máquina



Retorno Obtido: 2.4764

Variância obtida: 0.25

Pelos resultados pode-se concluir que não há grande diferença entre a média aritmética e a geométrica. Ambas obtiveram retorno e variância muito parecidos. Assim como o gráfico do retorno foi próximo. Logo podemos concluir que são previsores de retorno bons, porém muito similares.

Utilizando Aprendizado de Máquina para prever os retornos mostrou ter um melhor retorno que as duas médias vistas anteriormente. Porém o custo disso é uma variância mais alta, o que significa mais risco para o investidor.

Para verificar que a previsão feita pelo Aprendizado de Máquina era correta foi feito um teste onde as classes previstas eram invertidas. Ou seja, quando a árvore de decisão dizia que o ativo era ganhador ele era colocado na classe perdedora e vice-versa. Este teste teve o pior resultado de todos com um retorno de 1.8.

Podemos concluir pelos experimentos que as médias (aritmética e geométrica) como estimativas de retorno funcionam de forma parecida uma da outra. O Aprendizado de Máquina teve bom retorno, mas serve para investidores com maior aceitação ao risco.

## 5. Conclusões

O estudo da Teoria de Portfolio Moderna proporcionou um maior entendimento de vários aspectos do mercado financeiro como a gerência de portfolios e do próprio funcionamento da bolsa de valores. Além disso, o estudo desta teoria permitiu que o aluno se familiarizasse com técnicas de programação quadrática e os métodos de estimativa de retorno que utilizavam médias aritméticas e geométricas.

As aplicações de Aprendizado de Máquina revelaram uma área antes desconhecida pelo aluno porém de grande importância em vários problemas. Sua utilização no modelo de

Markowitz apresenta bons resultados e aparenta ser uma boa forma de resolver problemas clássicos de estimativa de retorno.

O desenvolvimento do sistema permitiu que o aluno pudesse ter contato com softwares importantes para aplicações em engenharia e finanças. A simulação do mercado foi essencial para melhor entendimento da Bolsa de Valores.

### **Referências**

1 - TAN, Pang-Ning, STEINBACH, Michael e KUMAR, Vipin. **Introduction do Data Mining**. Addison Wesley, 2006.

2 – ELTON, Edwin, GRUBER, Martin, Brown, Stephen e Goetzmann, William. **Modern Portfolio Theory and Investment Analysis** 5 ed. New York: Willey, 1995.

3- [www.cs.waikato.ac.nz/ml/weka/](http://www.cs.waikato.ac.nz/ml/weka/)

4-[www.mosek.com/](http://www.mosek.com/)

5 – DA SILVA, Thuener. **Estudo Experimental de Técnicas para Otimização de Carteiras**.